Ueber

DAS GEOID.

Mit einer Figurentafel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen philosophischen Facultät

der kgl. Ludwigs-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Ignaz Bischoff

Privatdozent an der techn. Hochschule München.

MÜNCHEN

Akademische Buchdruckerei von F. Straub

1889.

Ueber

DAS GEOID.

Mit einer Figurentafel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen philosophischen Facultät
der kgl. Ludwigs-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Ignaz Bischoff
Privatdozent an der techn. Hochschule München.

MÜNCHEN
Akademische Buchdruckerei von F. Straub
1889.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548319_0103

Vorwort.

Die vorliegende kleine Schrift zerfällt in zwei Abschnitte. Der erste enthält einige Sätze in Bezug auf das Geoid, der zweite sucht die Möglichkeit klarzulegen, dass Beobachtungen des Mondes von verschärfter Genauigkeit, wie sie allerdings zur Zeit noch nicht vorliegen und vielleicht auch in vorläufig absehbarer Zeit nicht erreicht werden, gewisse für jene Relationen nötige Bestimmungsstücke liefern können.

Im ersten Teil habe ich mich auf ein bisher wenig betretenes Gebiet begeben. Nachdem unsere hervorragendsten Astronomen und Geodäten die Nutzlosigkeit analytischer Speculationen aufs schlagendste nachwiesen, ist diesem Gegenstande weniger Aufmerksamkeit gewidmet worden, zumal der rechnende Geodät die Voraussetzung des Rotations-Elipsoides nie entbehren kann. Und doch lassen sich zwischen Punkten des Geoids höchst einfache Beziehungen lediglich mit Hülfe des Dreikantes herleiten. Den ursprünglichen Hauptsätzen sind noch einige weitere beigefügt, welche ein Criterium gewähren sollen, in wieweit die Hypothese eines Rotationskörpers im mathematischem Sinne mit dem Geoid übereinstimmt.

Der zweite Teil, Verwertung der Mondbeobachtung, ist nicht neuen Datums, nur die hier vorgeschlagene Art abweichend von den bisher angegebenen, welche auf eine Ermittlung des Radiusvektor hinauslaufen. Die Darstellung

hat sich hier, ohne in das Detail des Astronomen einzugehen, hauptsächlich darauf konzentriert, nachzuweisen, dass, wenn Beobachtungen des Mondes in einer beliebigen Azimutal-Ebene dieselbe Sicherheit wie jene im Meridian haben, Anomalien der Erdgestalt aufgedeckt, bei Erhöhung der Präcision dieselbe genauer bestimmt werden kann. Die Möglichkeit der Ausführung hängt von der Grösse der zu erwartenden Azimutaldifferenzen ab, welche bedeutend ausfallen, so lange die geographische Breite der Punkte sich innerhalb der Grenzen der Monddeklination bewegt. Beim Verlassen dieser Regionen gestalten sich die Verhältnisse minder günstig, und muss daher die Lösung des Problemes eine beschränkte genannt werden. Dass die von Helmert angegebene Methode der Bestimmung des Radiusvektor des Geoids für den beobachtenden wie rechnenden Astronomen immer rascher zu Resultaten führt, will ich gewiss nicht in Abrede stellen.

Zum Schlusse kann ich nicht umhin, Herrn Direktor Dr. Seeliger meinen tief empfundenen Dank auszusprechen für alle die liebenswürdige Bereitwilligkeit, mit welcher er mir nicht blos die Möglichkeit verschaffte, astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen zu üben, sondern auch mit freundlichen Winken bei meiner Arbeit zur Seite stand.

Inhalt.

I. Beziehungen auf dem Geoid.

		Seite
1.	Einleitung	1
2.	Strenge Formeln	2
3.	Fortsetzung	5
4.	Fortsetzung	8
5.	Entwicklungen für das Rotationsellipsoid	10
6.	Reduktion der Formeln für kleine Entfernungen	13

II. Bestimmung der Winkel n mit Hülfe des Mondes.

1.	Einleitung	16
2.	Grundgedanke des Verfahrens	18
3.	Lösung des Problems	19
4.	Wirkung eines Fehlers der Parallaxe	23
5.	Wirkung der Beobachtungsfehler	25
6.	Die zu erwartenden Azimutalabweichungen	27
7.	Schluss	31

Berichtigung.

An den Schnittpunkt der Bögen $A'K_a'$ und $E'K_b'$ in Fig. 2 der Tafel ist A zu setzen.

I. Beziehungen auf dem Geoid.

1. Einleitung. Die beiden geographischen Koordinaten je eines Punktes der Erdoberfläche, Polhöhe und Länge in Bezug auf einen als ersten gewählten Meridian ergeben sich aus astronomischen Beobachtungen, welche mit beliebig weit getriebener Genauigkeit die Positionen der Zenite auf der Himmelskugel gegen den Pol fixieren und daher auch die sphärischen Azimute liefern. Dabei ist über die Gestalt der Fläche, welcher die Punkte angehören, keinerlei Voraussetzung gemacht. Erst wenn man die astronomischen Azimute gegenseitig unsichtbarer Punkte, die Differenz zwischen wahrem und sphärischem Azimut, den Unterschied der Azimute der Vertikalschnitte, ihren Flächenwinkel und die Depressionswinkel kennen lernen will, muss man nach dem bisher üblichen Verfahren zu Annahmen über die Erdoberfläche greifen.

Zweck dieses Abschnittes ist nun zu zeigen, dass ohne irgend welche Voraussetzungen über das Geoid sich äusserst einfache Formeln für die eben genannten (und andere) Grössen ergeben, wenn man 1. die Zenitdistanz der beiden Orte (Amplitude) z und 2. die zwei Neigungen n_a und n_b je der Azimutal-Ebene des einen Orts gegen die Vertikale des andern benutzt.

Die Zenitdistanz (Amplitude) zweier Orte giebt, wenn B_a und B_b die Polhöhen L_{ab} den Längenunterschied bezeichnen, die sphärische Trigonometrie durch die Relation

$$\cos z = \sin B_a \cdot \sin B_b + \cos B_a \cdot \cos B_b \cdot \cos L_{ab}$$

Die Winkel n_a und n_b müssen mit Hülfe des Mondes bestimmt werden.

Die Ableitung der Formeln erfolgt auf geometrischem Wege, da im gegebenen Falle — über die Erdgestalt ist keine Annahme gemacht — der analytische nicht mit Erfolg betreten werden kann. (Vergl. Helmert: die mathem. und physik. Theorien der höheren Geodäsie Bd. I, S. 22). Lediglich wenn es sich darum handelt von den Zahlenwerten der auftretenden Unbekannten einen Begriff zu geben, ist auch hier als Repräsentant der Erdoberfläche das Rotations-Ellipsoid genommen.

2. Strenge Formeln. Wir vergleichen zunächst die Azimute der Vertikalschnitte mit den Azimuten auf der Kugel. In Figur 1, welche ein Rotations-Ellipsoid vorstellt, sind die Meridiane zweier Orte A und B, sowie die zwischen ihnen möglichen Vertikalschnitte gezeichnet. Nach Helmert ist bezeichnet in A mit a_{ab} das Azimut der Ebene, welche das Lot von A und den Punkt B enthält (dieselbe bilde mit der Vertikalen in B den Winkel n_b) und mit a'_{ab} das Azimut der Ebene, die das Lot von B und den Punkt A enthält; ihre Neigung gegen die Vertikale in A sei n_a. Die sphärischen Azimute sind durch a'_{ab} und a'_{ba} bezeichnet; sie sind aus demselben Dreieck zu berechnen, welches z lieferte. a'_{ab} kann offenbar auch genannt werden Azimut der Ebene Lot A Zenit von B, d. h. AZ_aZ_b.

Wenn man nun in B das Lot von A bis zum Zenit Z_a verfolgen könnte, so würde die dadurch bestimmte Ebene, wenn wir B als Mittelpunkt wählen, die Himmelskugel nach einem grössten Kreis schneiden, der auf dem Horizont von B nicht senkrecht steht. Die Schnittlinie dieser Ebene mit dem Horizont bildet mit der Südnordlinie den Winkel a'_{ba}.

In Figur 2 sei $SBFA'$ der Horizont von B, BZ_b die Normale in B, AZ_a jene in A, A' der Schnitt der letzteren

mit dem Horizont von B,*) somit BA' die Spur der Ebene AZ_aB im genannten Horizont. Ziehen wir BZ_a parallel AZ_a und schlagen um B eine Kugel, so stellt Bogen Z_aA' die auf dem Horizont von B nicht senkrechte Ebene AZ_aB vor. Legen wir endlich durch BZ_b eine Ebene senkrecht zu Ebene AZ_aB (Bogen Z_bZ_b') und eine weitere durch Z_a (Bogen Z_bZ_aF) d. i. also die Ebene BZ_bZ_a oder AZ_aZ_b, welche einander parallel sind, so entstehen zwei rechtwinklig sphärische Dreiecke. Da nun $Z_aZ_b = z$, $Z_bZ_b' = n_b$, $\sphericalangle Z_aA'F = 90^0 - n_b$, sowie

$$\sphericalangle A'BF = a'_{ba} - a'_{ba}$$
$$\sphericalangle Z_bZ_aZ_b' = a_{ab} - a'_{ab}$$

folgt aus $\Delta A'Z_aF$

$$1) \qquad \sin(a'_{ba} - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z}$$

und aus $\Delta Z_bZ_b'Z_a$:

$$2) \qquad \sin(a_{ab} - a'_{ab}) = \frac{\sin n_b}{\sin z}$$

Die Gleichungen 1) und 2) geben zunächst nur Unterschiede zwischen wahren und sphärischen Azimuten und beziehen sich auf zwei verschiedene Punkte. Es ist aber sofort ersichtlich, dass eine ähnliche Figur sich für den Horizont von A darstellen lässt, der wir entnehmen:

$$1^*) \qquad \sin(a'_{ab} - a'_{ab}) = \frac{tg\, n_a}{tg\, z}$$

$$2^*) \qquad \sin(a_{ba} - a'_{ba}) = \frac{\sin n_a}{\sin z}$$

Setzen wir

$$\sin n'_a = \sin n_a : \sin z$$
$$\sin n'_b = \sin n_b : \sin z$$

*) Um möglichst übersichtlich zu sein, gilt die Fig. 2 auch für die folgenden Beziehungen. Man hat sich daher entweder A, A' und Z_a in einer Geraden zu denken oder noch besser den Ort A auf AB zwischen B und A anzunehmen.

welche Substitutionen, wie sich später zeigen wird, zulässig sind, so folgt aus 2)

$$a_{ab} - a'_{ab} = n'_b .$$

Ferner nach 1*)

$$\sin (a\hat{}_{ab} - a'_{ab}) = \sin n'_a \frac{\cos z}{\cos n_a} = \sin n''_a$$

also die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte

3) $$a_{ab} - a\hat{}_{ab} = n'_b - n''_a$$
$$a_{ba} - a\hat{}_{ba} = n'_a - n''_b$$

Diese nun bekannten Grössen benutzen wir zur Entwicklung weiterer Formeln.

Im Horizont von B (Figur 2) seien $A'B$ und BE die Spuren der Ebenen AZ_aB und BZ_bA, AB die gerade Verbindungslinie (Sehne). Eine Kugel um B schneidet aus dem Dreikant ein sphärisches Dreieck aus, rechtwinklig bei E, und es ist Seite $(A'E = a_{ba} - a\hat{}_{ba}$, Seite $EA = \mu_{ba}$ der Depressionswinkel, d. h. der Winkel der Sehne mit dem Horizont, $\sphericalangle EA'A = 90^0 - n_b$, $\sphericalangle A'AE = \nu$ der Flächenwinkel der beiden Vertikalschnitte. Mithin

4) $$\cos \nu = \cos n_b \cos (a_{ba} - a\hat{}_{ba})$$

woraus folgt, wenn

$$\frac{\sin n_b}{\sin \nu} = \sin p_b$$

gesetzt wird, was, wie sich später zeigt, zulässig erscheint

4*) $$\sin (a_{ba} - a\hat{}_{ba}) = \sin \nu \cdot \sec n_b \cos p_b$$

Ferner

5) $$tg\,(a_{ba} - a\hat{}_{ba}) = tg\,\nu \cdot \sin \mu_{ba}$$

und endlich aus 4), 4*) und 5):

6) $$90^0 - p_b = \mu_{ba}$$

ebenso analog $$90^0 - p_a = \mu_{ab}.$$

Die Formel 5) wurde bereits von Helmert in den „math. und phys. Theorien der h. G." Bd. I S. 188, sowie von

Bremiker in dessen „Studien über höhere Geodäsie“ S. 23 angegeben.

Aus dem Vorstehenden erhellt, dass die Formeln für jede beliebige Gestalt der Erdoberfläche Gültigkeit haben. Erachtet man jedoch die Allgemeinheit durch die Annahme $n < z$ und $180^0 - z$, $n < \nu$ (wie es bei der Uebereinstimmung mit einer ellipsoidischen Oberfläche im Grossen und Ganzen sicher zutrifft) als geschädigt, so hindert nichts die Tangente statt des Sinus einzuführen.

3. Fortsetzung. Die bisher entwickelten Formeln geben Aufschluss über die gegenseitige Lage zweier Punkte, ohne eine Beziehung zur Erdaxe zu enthalten. Es leuchtet auch sofort ein, dass sie nichts in Bezug auf jene aussagen können, da nur die der Axe parallele Schnittlinie der Meridiane, welche von den beiden Loten getroffen wird, in Betracht kam. So wie wir aber in 3 Punkten die Winkel n bekannt voraussetzen, lässt sich entscheiden, ob die drei Meridiane sich nach einer Geraden schneiden. Wiewohl nun, wenn dies nicht zutrifft, auf die Lage der Erdaxe nicht geschlossen werden kann, und auch beim Zusammenfallen die Identität mit der Axe nicht erwiesen ist, so erkennt man doch die Nützlichkeit des Kriteriums bei zahlreicher vorhandenen Punkten mit bekannten Winkeln n. Wir wollen desshalb noch einige zur Lösung nötige Formeln hier wiedergeben.

Der Flächenwinkel χ_{ba} der Azimutalebene AZ_aB mit dem Meridian von B findet sich aus Figur 2, wo Bogen $Z_bK_b'N$ den Meridian, $Z_b'Z_aA'$ die Azimutalebene vorstellt. Das sphärische Dreieck $NA'K_a'$ ist bei N rechtwinklig, Seite $NA' = 180^0 - a'_{ba}$, $\sphericalangle NA'K_a' = 90^0 - n_b$, $\sphericalangle A'K_a'N = 180^0 - \chi_{ba}$, mithin

$$7) \qquad \cos \chi_{ba} = \cos a'_{ba} \cdot \cos n_b$$

ω_{ba} sei der Winkel der Sehne mit der Schnittlinie zwischen der Ebene AZ_aB und dem Meridian von B. In Figur 2 bezeichnet AB die Sehne, Z_bBK_b' das Lot von B, BK_a' die

eben genannte Schnittlinie. Die Kugel um B liefert ein sphärisches Dreieck, in welchem Bogen $K'_a K'_b$ im Meridian von B liegt.

Daher Seite $AK'_b = 90^0 - \mu_{ba}$

$\sphericalangle\, AK'_b K'_a = 180^0 - a_{ba}$

$\sphericalangle\, K'_b AK'_a = \nu$

$\sphericalangle\, AK'_a K'_b = \chi_{ba}$

Seite $K'_a K'_b = b_{ba}$ (von Hansen $B' - \Gamma$ genannt)

mithin

$$8) \qquad \sin \omega_{ba} = \cos \mu_{ba} \frac{\sin a_{ba}}{\sin \chi_{ba}}$$

$$= \sin b_{ba} \frac{\sin a_{ba}}{\sin \nu}$$

also

$$9) \qquad \sin b_{ba} = \cos \mu_{ba} \frac{\sin \nu}{\sin \chi_{ba}}$$

Aus Gl. 9) folgt mit Berücksichtigung von 6)

$$10) \qquad \sin b_{ba} = \frac{\sin n_b}{\sin \chi_{ba}}$$

und im Zusammenhalt mit Gl. 7)

$$11) \qquad \cos b_{ba} = \frac{\cos n_b \cdot \sin a'_{ba}}{\sin \chi_{ba}}$$

Die Gl.

$$12) \qquad tg\, b_{ba} = tg\, n_b : \sin a'_{ba}$$

sowie

$$13) \qquad tg\, \chi_{ba} = tg\, a'_{ba} \sec b_{ba}$$

hätten aus dem gleichen rechtwinklig sphärischen Dreieck unmittelbar gefunden werden können. Das Dreieck $K'_a NA'$ giebt endlich den Winkel zwischen den Schnittlinien der Ebene $AZ_a B$ mit dem Horizont und Meridian von B, nämlich Seite $A'K'_a = \gamma_{ba}$

$$14) \qquad tg\, \gamma_{ba} = \operatorname{cotg} b_{ba} \cdot \sec a'_{ba} \cdot \sec n_b$$

Die Seite AA' in dem sphärischen Dreieck EAA' gleich μ'_{ab} gesetzt folgt zu

$$tg\, \mu'_{ba} = tg\, \mu_{ba} \cdot \sec \nu$$

Und analog (was von Gl. 6 an als überflüssig anzuschreiben unterlassen wurde)

15) $$tg\,\mu'_{ab} = tg\,\mu_{ab}\sec\nu.$$

Die Gl.

$$\omega_{ba} = \gamma_{ba} - \mu'_{ba}$$

kontrolliert die Richtigkeit der bisher gegebenen Formeln.

Endlich müssen wir noch den Winkel kennen lernen, welchen die Sehne zweier Orte mit dem im Meridian des einen Orts liegenden Schnitt der Ebene einschliesst, welche bestimmt ist durch jenen Ort und das Lot eines dritten Orts. In der Figur 3 wird der Fall erledigt für den Winkel ω'_c*) der Sehne AC mit dem Schnitt der Ebene Lot B Punkt C und dem Meridian von C nach Linie CK'_b. In dem sphärischen Dreieck, welches die Kugel um C mit den von den Linien AC, CZ_c, CK'_b herrührenden Ecken giebt, ist bekannt:

$$\text{Seite } AK'_c = 90^0 - \mu_{ca}$$
$$\text{Seite } K'_bK'_c = b_{cb}$$
$$\sphericalangle\, AK'_cK'_b = a_{ca}, \text{ daher}$$

16) $$\cos\omega'_c = \sin\mu_{ca}\cdot\cos b_{cb} + \cos\mu_{ca}\cdot\sin b_{cb}\cos a_{ca}$$

Setzen wir jetzt ein Rotationsellipsoid voraus und verbinden den Schnitt des Lotes von B mit der Axe in K'_b mit den Orten A und C, so entsteht dadurch ein Dreikant, von dem drei Seiten und ein Winkel bekannt sind, nämlich

$$\text{Seite } BK'_bC = 180^0 - (90^0 - \mu_{bc} + \omega_{cb})$$
$$\text{„ } BK'_bA = 180^0 - (90^0 - \mu_{ba} + \omega_{ab})$$
$$\text{„ } AK'_cC = 180^0 - (\omega'_c + \omega'_a)$$
$$\sphericalangle \text{ an } BK'_b = a_{bc} - a_{ba}.$$

Es ist also eine überschüssige Bestimmung vorhanden. Schneiden sich nun die 3 Meridiane, wie es allgemein der Fall sein wird, nach 3 verschiedenen Parallelen zur Erdaxe, so bleiben unsere Relationen 7) -16) gültig, die entsprechen-

*) Konsequenter Weise müsste der Winkel ω_{bca} bez. werden.

den Linien treffen sich aber nicht mehr in einem Punkte, und deshalb wird das sphärische Dreieck der überschüssigen Bestimmung nicht mehr genügen können. Obwohl wir nun 3 solcher Dreikante zur Verfügung haben, vermögen wir doch aus den Widersprüchen keinen andern Schluss auf die gegenseitige Lage zu ziehen als den einer besseren oder geringeren Uebereinstimmung der Geoidfläche mit einem Rotationskörper in streng mathematischem Sinne.

4. Fortsetzung. Da die Winkel n durch gleichzeitige Beobachtungen des Mondes zu finden sind, scheinen Beziehungen zwischen Orten, wo dies praktisch unmöglich ist, ausgeschlossen. Wie in diesem Falle vorgegangen werden muss, soll uns zunächst beschäftigen.

Seien A, B und C drei Orte und so gelegen, dass sowohl in B und A, als auch in B und C gleichzeitige Beobachtungen unter nicht zu kleinen Höhenwinkeln möglich sind. Sowie nun in B die Winkel der Azimutalebene BAZ_a und BCZ_c gegen das Lot dortselbst bestimmt sind und ebenso die Neigungen der anderen zwei Azimutalebenen gegen die Lote in A und C, lässt sich angeben: der Depressionswinkel der Sehne BA, jener von BC und also auch der Winkel der Ebene ABC mit dem Horizont von B sowie mit dem Horizont von A. Ferner müssen Beobachtungen zwischen A, C und D vorliegen, wo in A und D sowie in C und D gleichzeitig der Mond sichtbar ist. Ganz analog folgt aus diesen Beobachtungen der Winkel der Ebene ACD gegen den Horizont von A. Nun kennen wir in A die Lage dreier Ebenen, nämlich jene des Horizonts und der Ebenen ABC sowie ACD; die letzteren schneiden sich nach AC, daher lässt sich der Depressionswinkel μ_{ac} sowie das Azimut a_{ac} angeben.

Wir stellen die nötigen Formeln auf. Da von nun an in den Orten B und D die Winkel je zweier Ebenen mit dem Lote vorkommen, muss das n noch einen zweiten Index

erhalten. Der erste soll wie bisher derjenige des Orts sein, wo die Azimutebene nicht Lotebene ist, der zweite den Ort bezeichnen, wo die Ebene lotrecht steht. Die Beobachtungen in B, A und C haben also n_{ba}, n_{bc}, n_{ab} und n_{cb} ergeben und aus den Gl. 3—6) folgt

$$90^0 - p_{ba} = \mu_{ba}$$
$$90^0 - p_{bc} = \mu_{bc}$$

wo

$$\sin p_{ba} = \frac{\sin n_{ba}}{\sin \nu}$$

In der Figur 4 stellt HBC' den Horizont von B dar, τ den gesuchten Winkel der Ebene ABC mit dem Horizont, $\mu_{ba} = AA'$, $\mu_{bc} = CC'$ Seite $A'C' = a_{bc} - a_{ba}$. Der Bogen $A'H = w$ giebt zugleich das Azimut der Schnittlinie, nämlich

$$a = a_{ba} - w$$
$$= a_{bc} + w$$

je nachdem $\mu_{ba} \lesseqgtr \mu_{bc}$.

Aus den Gl.

$$\sin w = \operatorname{cotg} \tau \cdot tg\, \mu_{ba}$$
$$\sin (w + \Delta a) = \operatorname{cotg} \tau \cdot tg\, \mu_{bc}$$

folgen w und τ.

Es ist nun der Winkel der Ebene ABC mit dem Horizont von A zu bestimmen. Die Beziehungen liefert das Dreikant der Ebenen ABC, Horizont von A und B; Mittelpunkt der Kugel A; die Parallelen zu den Schnittlinien geben ein sphärisches Dreieck. In demselben ist bekannt: der Winkel der Seiten Horizont von A und Horizont von B nämlich z, ferner der Winkel des Horizonts von B mit der Ebene ABC das eben bestimmte τ, endlich die Seite im Horizont von B. Die Azimute der beiden Schenkel sind bekannt, nämlich $a_{ba} - w$ und $a'_{ba} \pm 90^0$; daher

$$h_b = (a_{ba} - w) - (a'_{ba} \pm 90^0)$$

Der gesuchte Winkel τ' der Ebene ABC mit Horizont von A, sowie die Seite im letzteren (h_a) folgt aus

$$\cos \tau' = \cos \tau \cdot \cos z + \sin \tau \cdot \sin z \cdot \cos h_b$$

$$\sin h_a = \frac{\sin h_b \cdot \sin \tau}{\sin \tau'}$$

Weil nun h_a gefunden worden, ist auch das Azimut der Schnittlinie der Ebenen ABC und Horizont von A bekannt, denn das Azimut der Schnittlinien der Horizonte beträgt aus dem gleichen Grunde wie oben

$$a'_{ab} \pm 90^0$$

Auf die gleiche Weise ergiebt sich aus den Resultaten der Beobachtungen in A, C und D der Winkel τ'' der Ebene ACD mit dem Horizont von A und das Azimut der Schnittlinie. Ebene ABC, ADC und der Horizont von A geben auf der Kugel um A ein sphärisches Dreieck, das Perpendikel auf die letztgenannte Seite den gesuchten Depressionswinkel μ_{ac}.

Der gleiche Gang ist bezüglich des Horizontes von C einzuschlagen; da sich die Resultate der verschiedenen Rechnungsstadien nicht zusammenfassen lassen, wurde von der ohne Einführung von Hülfswinkeln uneleganten Lösung hier abgesehen.

5. Entwicklungen für das Rotations-Ellipsoid. Um uns ein Urteil über die Beträge der Grössen n, ν u. s. f. zu bilden, leiten wir dieselben für ein Rotations-Ellipsoid ab. Es lässt sich hiebei des Zusammenhanges halber nicht vermeiden, genügend Bekanntes rekapitulieren zu müssen, wobei wir uns jedoch unter Verweisung auf Helmert, höh. Geod. Bd. I S. 135—36 und 183—84 der möchlichsten Kürze befleissigen wollen.

Ableitung von n. Statt der halben grossen Axe der Meridianellipse a_o soll stets die Einheit genommen werden. Für ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Ellipsoids, der Rotationsaxe als Z-Axe, der Meri-

dian-Ebene von A als XZ Ebene folgt für die Koordinaten von A, B, K'_a und K'_b (vergl. Fig. 1):

$$x_a = \frac{\cos B_a}{W_a}, \qquad x_b = \frac{\cos B_b \cdot \cos L_{ab}}{W_b}$$

$$y_a = 0, \qquad y_b = \frac{\cos B_b \cdot \sin L_{ab}}{W_b}$$

$$z_a = \frac{(1 - e^2) \sin B_a}{W_a}, \qquad z_a = \frac{(1 - e^2) \sin B_b}{W_b}$$

$$x'_a = 0, \qquad x'_b = 0$$

$$y'_a = 0, \qquad y'_b = 0$$

$$z'_a = -\frac{e^2 \sin B_a}{W_a}, \qquad z'_b = \frac{-e^2 \sin B_b}{W_b}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}.$$

Der Uebergang von diesem Koordinatensystem zu einem andern mit A als Ursprung der Tangentialebene in A als $\xi\eta$ Ebene, der Normalen in A als ζ Axe — positiv nach unten — erfolgt durch:

$$\xi = (x - x_a) \cdot \sin B_a - (z - z_a) \cos B_a$$
$$\eta = y$$
$$\zeta = -(x - x_a) \cos B_a - (z - z_a) \sin B_a.$$

Die Gleichung der Ebene Lot B Punkt A hat daher die Form:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

und wird bekannt, indem man sie auf die 3 Punkte A, B und K'_b anwendet. Es ergiebt sich aus ihr

$$\cos (90^0 - n_a) = \sin n_a = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die Werte für A, B und C eingesetzt, folgt nach einigen Reduktionen, wobei z, a'_{ab}, a'_{ba} ihre frühere Bedeutung haben, während zur Abkürzung dient

$$D = \frac{\sin B_b}{W_b} - \frac{\sin B_a}{W_a}$$

$$\sin n_a = \frac{-e^2 \cdot D \cdot \cos B_a \sin L \cdot \sin a'_{ab}}{\sqrt{\frac{\sin^2 L}{W_a^2} + 2e^2 \frac{D}{W_a} \cdot \sec B_b \cdot \sin z \cdot \sin^2 a'_{ab} \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0) + e^4 D^2 \cdot \sin^2 a'_{ab}}}$$

Der Nenner kann nie kleiner als der Zähler werden; es ergiebt sich n als positiver oder negativer kleiner Winkel. Die Bestimmung eines Maximum stösst auf erhebliche Schwierigkeiten, wesswegen ein genähert grösster Wert durch Probieren gefunden wurde. Punkte mit entgegengesetzt gleicher Polhöhe lieferten die grössten Beträge. Bei wachsendem L rückt a'_{ab} immer näher an 90^0, z an 180^0, und n erreicht den Maximalbetrag in der Nähe von $L = 170^0$. So findet sich für $B_a = +45^0$, $B_b = -45^0$ bei

$L = 60^0$	$n = 14' 35,''3$	$z = 104^0 28' 39,''1$
$= 90$	$= 18\ 49,1$	$= 120\ 0\ 0$
$= 120$	$= 21\ 19,4$	$= 138\ 35\ 34,6$
$= 150$	$= 22\ 35,7$	$= 158\ 54\ 33,8$
$= 160$	$= 22\ 50,2$	$= 165\ 53\ 38,1$
$= 170$	$= 22\ 56,7$	$= 172\ 56\ 0,4$
$= 179\ 30'$	$= 15\ 59,5$	$= 179\ 34\ 2,1$
$= 179\ 58'$	$= 1\ 29,1$	$= 179\ 58\ 11,1.$

Die Zeitdistanzen wurden angeschrieben zur Bestätigung der Zulässigkeit der Substitution

$$\sin n' = \frac{\sin n}{\sin z}$$

Die analytische Ableitung von ν gestaltet sich noch weit komplizierter, dagegen liefert die geometrische Anschauung (vgl. Helmert Bd. I S. 184) sehr leicht das Resultat, dass ν mit der Annäherung der Sehne an die Axe bis 180^0 wachsen kann.

Um die Substitution

$$\sin p = \frac{\sin u}{\sin \nu}$$

zu rechtfertigen, folgen hier einige Zahlen für $B_a = +45^0$, $B_b = -45^0$

$L = 90^0$	$\nu = 0^0\,32'\,36''$
$= 120$	$= 1\ \ 0\ 13$
$= 150$	$= 2\ \ 2\ 43$
$= 160$	$= 3\ \ 6\ \ 8$
$= 170$	$= 6\ 12\ 29$
$= 179^1/_2$	$= 97\ 40\ 29$

Da n immer klein bleibt, ν aber jeden Wert annehmen kann, zeigt Gl. 4) am deutlichsten, dass auch die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte alle Beträge zwischen 0^0 und 180^0 durchläuft.

6. Reduktion der Formeln für kleine Entfernungen. Um Helmert's Formeln für Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte und Flächenwinkel derselben — gültig für kleine Entfernungen — aus unseren strengen Formeln abzuleiten, transformieren wir zunächst den Ausdruck für $\sin n_a$. Wir stellen im Nenner ein völliges Quadrat her und haben nach Division mit $\sin a'_{ab}$ in demselben

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cos(a'_{ba} \quad 180^0}{\cos B_b \ W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2}\left[\frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} - \frac{\sin^2 z \cos^2(a'_{ba} - 180'')}{\cos^2 B_b}\right]$$

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0}{\cos B_b \ W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2}\frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} \cdot \sin^2(a' - 180^0)$$

Bei kleinen Entfernungen kann man nun stets $e^2 D$ gegen $\frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \ W_a}$ vernachlässigen und hat daher

$$\sin n_a = -\frac{e^2 \cdot D \cos B_a \cdot \sin L}{\frac{1}{W_a} \cdot \frac{\sin L}{\sin a'_{ab}}}$$

Entwickeln wir nun D und W nach Potenzen von e^2 und bedenken, dass wir nur bis zu Gliedern 2. Ordnung incl. gehen wollen, so folgt, da

$$\frac{1}{W_a} = 1 + Gl_2$$

$$e^2 D = e^2 \left\{ \frac{\sin B_b}{W_b} - \frac{\sin B_a}{W_a} \right\} = e^2 (\sin B_b - \sin B_a) + Gl_2$$

$$\sin n = -2\, e^2 \cdot \cos B_a \cdot \sin a'_{ab} \cdot \sin \frac{B_b - B_a}{2} \cdot \cos \frac{B_b + B_a}{2}$$

Wir führen Mittelwerte ein

$$B = \tfrac{1}{2} (B_a + B_b)$$
$$a' = \tfrac{1}{2} (a'_{ab} + a'_{ba} - 180^0)$$

Nach dem Sinussatze ergiebt sich in Strenge

$$\frac{\sin 2a'}{\sin 2a'_{ab}} = \tfrac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\sin^2 z - \sin^2 L \cos^2 B_a}}{\sqrt{\sin^2 z - \sin^2 L \cdot \cos^2 B_b}} + \frac{\cos B_a}{\cos B_b} \right]$$

und hier genau innerhalb obiger Grenzen

$$\sin 2\, a' = \sin 2\, a'_{ab} \cdot \cos \frac{B_b + B_a}{2} \cdot \cos \frac{B_b - B_a}{2} \sec B_b$$

ferner

$$\cos B_a \cdot \cos B_b = \cos^2 B + Gl_2$$

also

$$\sin a'_{ab} = \frac{\sin 2\, a' \cdot \sec a'_{ab} \cos B_b}{2 \cos \tfrac{1}{2} (B_b + B_a) \cdot \cos \tfrac{1}{2} (B_b - B_a)}$$

nun alles in Sekunden:

$$n = -\varrho'' \cdot e^2 \cos^2 B \sin 2\, a'\, tg\, \tfrac{1}{2} (B_b - B_a) \cdot \sec a'_{ab}$$

Unter s und ϱ_n die Entfernung der beiden Punkte und den Querkrümmungshalbmesser für die Mittelbreite verstanden, folgt

$$\operatorname{tg} (B_b - B_a) = \cos a'_{ab} \operatorname{tg} \left(\frac{s}{\varrho_n} \right)$$

$$n = -\varrho'' \frac{e^2 s}{2\varrho_n} \cdot \cos^2 B \cdot \sin 2\, a'$$

für die Azimutaldifferenz benutzen wir nicht die Gleichung (3), sondern vertauschen in (1) und (2) Tangente wie Sinus mit dem Bogen und haben:

$$a_{ab} - a'_{ab} = n \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2}$$

Da endlich noch

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{s}{2\,\varrho_n}$$

$$a_{ab} - a'_{ab} = -\varrho'' \frac{e^2 s^2}{4 \varrho^2{}_n} \cdot \cos^2 B \cdot \sin 2\,a'$$

Der Flächenwinkel nach Gleichung (4) ist

$$\sin \nu = \sqrt{\sin^2 n + \sin^2 (a_{ab} - a'_{ab})} + \mathrm{Gl}_4$$

$$= \sin n \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}}$$

$$= \sin n \cdot \sec \frac{z}{2}$$

$$\nu = -\varrho'' \cdot \frac{e^2 s}{2\,\varrho_n} \cdot \cos^2 B \cdot \sin 2\,a'.$$

Diese Formeln stimmen mit jenen Helmerts S. 187 und 188 überein, nur ist dort bei der Azimutaldifferenz a_0 statt ϱ_n gesetzt.

Wir fanden oben

$$\sin n_a = -e^2 D \cdot \cos B_a \sin a'_{ab}, W_a.$$

Analog wird

$$\sin n_b = -e^2 D \cdot \cos B_b \sin a'_{ba} \cdot W_b$$

also auch, da bei kleinen Entfernungen in den Gl. 2 und 2* der Sinus mit dem Bogen vertauscht werden darf

$$a_{ab} - a_{ba} - (a'_{ab} \quad a'_{ba}) \quad - \frac{e^2 D \cdot W_a}{\sin z} \left\{ \cos B_a \cdot \sin a'_{ab} - \cos B_b \sin a'_{ba} \cdot \frac{W_b}{W_a} \right\}$$

Da nun

$$\frac{W_b}{W_a} = 1 + \mathrm{Gl}_2,$$

so folgt

$$a_{ab} - a_{ba} = a'_{ab} - a'_{ba} + \mathrm{Gl}_4\,,$$

das ist Dalby's Satz.

II. Bestimmung der Winkel n mit Hülfe des Mondes.

1. Einleitung. Der erste Versuch, die Gestalt der Erde aus Beobachtungen des Mondes zu erhalten, rührt von J. A. Euler her. Sein Gedankengang war kurz folgender (vergl. die Abhandlungen der Bayer. Akademie der Wissenschaften Bd. V 1768): Der Mond wird von mehreren Stationen eines Meridianes aus bei seiner Kulmination beobachtet. Die Polhöhen müssen bekannt sein; ihre Komplemente heissen φ, während ψ die aus der Beobachtung erhaltenen Winkel zwischen den Visierlinien nach dem Monde und den Parallelen zur Erdaxe darstellen. „Eine aufmerksame Vergleichung dieser beiden Werte von φ und ψ paarweis genommen kann leicht zeigen, wie dieser Winkel ψ von jenem φ abhängt: das ist, man wird nicht ohne grosse Mühe diejenige Gleichung erraten können, welche auf eine allgemeine Art zwischen diesen beiden Winkel ψ und φ stattfinden müsste, zumal die Figur der Erde schon einigermassen bekannt ist.“

Aus Figur 5, wo $GB = g$, $Bx = x$, $MG = h$, $GK = y$ gesetzt ist, nimmt Euler die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h - y}{g + x}$$
$$dx = dy \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Um aus der Differentialgleichung das Integral $\int d\psi \frac{\sin \omega}{\cos \omega}$ zu eliminieren ($\omega = \psi - \varphi$), nimmt er beispielsweise an, die Vergleichung der Winkel ψ und φ hätte zur Gleichung

$$\sin (\psi - \varphi) = n \sin (\psi - \alpha)$$

geführt, wobei n und α offenbar Konstante bedeuten und leitet damit kreisförmige Meridiane ab. Aus der Abhandlung folgt also, dass der Zusammenhang zwischen ψ und φ nicht der eben vorausgesetzt einfache sein kann.

Ehe wir weitergehen muss Eulers Standpunkt noch näher präcisiert werden. Er versuchte die Figur der Erde im Allgemeinen zu bestimmen und begnügte sich mit der Ermittelung eines Meridianes, „was ausreicht, wenn sonsten die Figur der Erde nicht gar zu unordentlich ist". Seitdem ist es zur Gewissheit geworden, dass die Erde nicht der regelmässige Körper sein kann, für den sie so lange gehalten wurde.

Wenn man daher jetzt von der Benützung des Mondes zur Bestimmung der Erdgestalt im Detail spricht, so kann das nur auf zweierlei hinauslaufen: entweder den Radiusvektor des Beobachtungsortes zu ermitteln („individuelle Horizontalparallaxe") oder den Winkel zu messen, den das Lot eines Orts mit der Vertikalebene des andern bildet.

Lässt man wie bisher bei der Bestimmung der Mondparallaxe die Hypothese zu, dass alle Lote eines Meridianes die Drehaxe treffen, so ergiebt sich dieselbe aus den Daten zweier Orte, d. i. aus dem ebenen Viereck Schwerpunkt - A — Mond — B. Sowie wir aber über die Erdgestalt keine bestimmte Voraussetzung machen, wird die Linie Schwerpunkt-Ort nicht im Meridian liegen, das Viereck nicht eben sein.

Helmert hat nun die Bestimmung der Parallaxe ohne Annahme einer besonderen Erdgestalt gegeben. Der Uebergang von dem Koordinatensystem mit dem Ursprung im Orte an der Oberfläche zu jenem, welches dem ersten parallel den Ursprung im Schwerpunkt der Erde hat, geschah nach Encke unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungen auf den Axen seien

$$-r \cdot \sin(B-\varphi),\ 0,\ -r\cos(B-\varphi)$$

— r Radiusvektor, φ geozentrische Breite —,

während Helmert dafür nimmt

$$r\sin\zeta\cdot\cos\alpha,\ r\sin\zeta\cdot\sin\alpha,\ r\cos\zeta$$

worin ζ die Zenitdistanz des geozentrischen Zenits, α dessen Azimut ist. Es werden nun Formeln für $a_1 - a$ und $z_1 - z$ aufgestellt, hierin sind a_1 z_1 beobachtet, a z den Mondtafeln entnommen — und zugleich Verbesserungen für die Tafelwerte des Stundenwinkels und der Deklination angebracht. Es lässt sich nun (vergl. hiezu Helmert, h. G. Bd. II S. 459) der Radiusvektor nur im Verein mit der Unsicherheit der Deklination ermitteln oder indirekt durch das sehr komplizierte Verfahren gleichzeitiger Bestimmung neuer Tafeln aus den betreffenden Beobachtungen, wenn bei der Neubearbeitung die geozentrischen Koordinaten der Station als drei von einander unabhängige Unbekannte eingeführt werden (s. auch das Bruns'sche Referat über Helmert h. G. II. Teil in der Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellsch. 1885, S. 190).

Wollte man nun in ähnlicher Weise wie oben versuchen, die Unsicherheit der Deklination durch gleichzeitige Beobachtungen zu eliminieren, so erkennt man rasch die Unmöglichkeit, hier neue oder vereinfachende Gesichtspunkte zu finden. Aber es tritt noch eine Schwierigkeit auf — abgesehen von denen der Beobachtung — sowie wir den Mond an zwei Orten eines Meridianes in der Kulmination beobachten, ist die Beobachtungs-Ebene des einen Orts Lotebene für den andern Stellen wir dagegen in A auf den Mond ein, wenn er in Ebene AZ_aB sich befindet, so ist diese Ebene nicht mehr senkrecht auf dem Horizont von B, sondern schliesst mit der Vertikalen den Winkel n_b ein. Dieser Umstand, welcher die allgemeine Bestimmung der Parallaxe erschwert, kommt uns zu gut, weil wir eben diesen Winkel finden wollen.

2. Grundgedanke des Verfahrens. Die Ebenen AZ_aB und BZ_bA sollen mit Hülfe des Mondes fixiert werden. Kennen wir in A das Azimut des Punktes B und stellen

auf den Mond*) ein, wenn er in die Ebene AZ_aB tritt und zu gleicher Zeit auch in B, so befindet sich der beobachtete Mondort offenbar in der auf dem Horizont von B nicht senkrechten Ebene. Liegen nun zwei Orte A und B auf einem Rotationsellipsoid von bekannten Dimensionen, so geht eine in A unter dem Azimut a_{ab} gelegte Ebene auch durch den Punkt B. Wenn wir nun die in A eingestellten Durchgänge des Mondes durch Ebene AZ_aB in B gleichzeitig mit einem Universale beobachten würden, dessen Alhidadenaxe nicht lotrecht, sondern gegen die Vertikale um den Winkel n_b geneigt ist und dessen horizontale, auf der Alhidadenaxe senkrechte Visierlinie nach einem Punkte mit dem Azimut a'_{ba} weist, so sollten alle in A stattfindenden Durchgänge in demselben Zeitmomente in dem Instrument in B sichtbar sein, ohne dass es nötig wäre mit dem Fernrohre eine andere als eine kippende Bewegung zu machen.

Befinden sich dagegen A und B nicht auf dem vorausgesetzten Ellipsoid, so dass die unter dem gerechneten Azimut a_{ab} gelegte Ebene nicht durch B geht, so muss, um die gleichen Zeitmomente in B wie A aufzufassen, das Fernrohr in B um seine Alhidadenaxe gedreht werden und zwar um Beträge, welche verschieden sind 1. je nach der Uebereinstimmung der vorausgesetzten und wahren Erdgestalt und 2. je nach Zenitdistanz und Entfernung des Mondes in Bezug auf Punkt B.

3. Lösung des Problems. Wir stellen zuerst die Hauptrelation auf. In der Figur 6 ist HB der Horizont, BZ_b das Lot, BG die Spur der Ebene AZ_aB, M_1 der Ort des Mondes in dieser Ebene wie er in demselben Augenblick in A und B beobachtet wurde. Wir denken uns nun durch diesen momentanen Ort M_1 eine Kugel mit B als Mittelpunkt

*) Sollte genauer heissen: auf einen Punkt der Mondscheibe. Wir behalten die ungenaue Bezeichnung der Kürze wegen bei.

und legen durch BZ_b eine Ebene senkrecht zu AZ_aB; die Schnittlinie beider sei BZ'_b. Diese beiden Ebenen im Verein mit der Lot-Ebene durch M_1, d. i. BM_1Z_b bilden ein Dreikant und auf der Kugel ein bei Z'_b rechtwinkliges sphärisches Dreieck. In demselben ist Bogen $Z_bZ'_b = n_b$, $Z_bM_1 = z_1$ die beobachtete Zenitdistanz, während Winkel $Z'_bZ_bM_1 = 90^0 - (a_1 - a'_{ba})$, weil Ebene $Z_bZ'_bB$ senkrecht zu GB. Also

$$17) \qquad \sin (a_1 - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z_1}$$

Wenn wir nun den Mond ein anderes Mal bei seinem Durchgange durch die Ebene AZ_aB in B beobachten, so wird seine Entfernung eine andere geworden sein; legen wir aber wieder um B als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius BM_2, so geben die entsprechenden Ebenen ein sphärisches Dreieck, aus dem folgt

$$\sin (a_2 - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z_2}$$

Alle Beobachtungen in B, angestellt in den zugehörigen Sternzeiten in A, müssen das gleiche n_b liefern, wenn A und B auf dem vorausgesetzten Rotations-Ellipsoid liegen. Sei nun der Figur 6 B der ellipsoidisch angenommene Ort, B' der wahre. Vom letzteren aus wurde der Mond in M_1, $M_2 \cdots$ beobachtet. Die abgelesenen Azimute a'_1, $a'_2, \cdots$ differieren gegen jene a_1, $a_2, \cdots$ in B. Da die Horizonte der Orte B' und B parallel sein müssen, dürfen wir vorläufig alles in der Ebene HB liegend annehmen und die Untersuchung der Verschiebung von B' längs des Lotes einstweilen ausser Acht lassen. Da nun

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1 - a'_1 \\ \varepsilon_2 &= a_2 - a_2 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

— ε der Winkel der Verbindungslinien der Horizontalprojektion von M mit B und B' — so liessen sich schon aus

zwei der vorliegenden Beobachtungen die Polarkoordinaten a und e der Projektion des wahren Orts auf den Horizont des ellipsoidischen bestimmen, wenn die a_1, a_2, ··· bekannt wären. Es ist nämlich $BM_1 = \frac{1}{\sin p'_1} = \Delta_1$ gesetzt:

18)
$$e \sin (a - a'_1) = \Delta_1 \sin z_1 \sin \varepsilon_1 = c_1$$
$$e \cdot \sin (a - a'_2) = \Delta_2 \cdot \sin z_2 \cdot \sin \varepsilon_2 = c_2$$

Daher

$$\operatorname{tg} (a - \frac{a'_1 + a'_2}{2}) = \operatorname{tg} \frac{a'_2 - a'_1}{2} \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}$$

$$e = \sec M : c_2$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{c_1 - c_2 \cos (a'_2 - a'_1)}{c_2 \sin (a'_2 - a'_1)}$$

Die a_1, a_2, ... könnten aus den Mondephemeriden entnommen werden, da ihre Beobachtungszeiten bekannt sind. Wir wollen jedoch hier einen andern Weg einschlagen, welcher gestattet, unsere in A erhaltenen Koordinaten des Mondes unmittelbar zu verwerten.

In Figur 7 ist AZ_aBM die Beobachtungsebene in A, $Z_bZ_b = n_b$, das Viereck AK_aBM also eben. Da wir die a_b und z_b kennen lernen wollen, welche in dem ellipsoidischen Ort B beobachtet worden wären, so sind als bekannt anzunehmen: die Sehne k, der Depressionswinkel μ_{ab} und der Winkel ω_{ba} zwischen Sehne und dem Schnitt der Ebene AZ_aB mit dem Meridian von B nach Formel 8 oder 9 S. 6.

Da wir die in A beobachteten Azimute und damit auch die Zenitdistanzen z_a (s. S. 25 u. f) zunächst als fehlerfrei voraussetzen wollen, so liesse sich, wenn Δ_a ebenfalls genau bekannt wäre, zu jeder Zenitdistanz z_a die zugehörige z_b und somit nach Gl (17) auch das entsprechende Azimut des Mondes angeben. Nämlich

$$\sin m = \frac{k}{\Delta a} \cos (z_a - \mu_{ab})$$

19) $$z'_b = 90 + \mu_{ab} - \omega_{ba} + m - z_a$$

$$\cos z_b = \cos z'_b \cdot \cos n_b$$

— die Indices a und b bezeichnen die Zugehörigkeit zum betreffenden Orte, während die gleichartigen Grössen eines Ortes durch Ziffern unterschieden sind (i der allgemeine Repräsentant sämmtlicher Ziffern).

Von den stets in überschüssiger Zahl vorhandenen Gl. (18) liefert jede bei Annahme gleicher Gewichte eine Fehlergleichung von der Form

$$\sin (a - a_i) \cdot de + e \cos (a - a_i) \cdot da + l_i = 0.$$

Es handelt sich noch um die Verschiebung von B' längs des Lotes. Sie findet sich, wenn z_i die gerechnete, z'_i die beobachtete Zenitdistanz ist, aus eben so viel Gl. wie oben, lautend

$$h = \frac{\Delta_b \cdot \sin (z_i - z'_i)}{\sin z_i}$$

Obwohl nun der lineare Betrag derselben senkrecht zur Sehne ungefähr der gleiche wie der horizontale ($e \cdot \sin a$) sein dürfte, kann derselbe doch kaum konstatiert werden, weil in dem Dreieck, dem die Gl. entnommen, eine Seite immer gleich der Entfernung des Mondes vom Orte ist; es bleibt daher h ganz unbestimmt.

Da nun die Sehne k nach der ellipsoidischen Annahme genau bekannt ist und die zwei Koordinaten e und $\sphericalangle a$ die Lage des wahren Orts im Horizont des angenommenen festlegen, so ergiebt sich zunächst der Winkel zwischen der Sehne und Linie c, hiemit die weiteren Bestimmungsstücke des Dreiecks mit den Seiten c, wahre und ellipsoidische Sehne; daraus folgt a_{ab} genähert, wenn auch h unbekannt bleibt. Es ist nach Helmert, h. G. Bd. I S. 190, wenn $a^h_{ab} - a_{ab}$ die Azimutaldifferenz für die von A ausgehenden Ebenen be-

zeichnet, welche durch B' und den im Lot von B' um h verschobenen Punkt gehen, für $h = 1280$, bz. 1920 m in Maximo

$$a^h_{ab} - a_{ab} = 0''{,}14 \text{ bz. } \cdot\ 0''{,}21.$$

4. Wirkung eines Fehlers der Horizontalparallaxe. Es fragt sich zunächst, welchen Fehler ein den Ephemeriden zu entnehmender Wert für Δ_a, welcher unter einer ellipsoidischen Annahme aus dem geozentrischen gerechnet ist, in den Gl. 19 involviert. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung bei allen Erscheinungen, welche von der Mondparallaxe abhängen, weisen darauf hin, dass die Abstände des Geoids vom Sphäroid wenigstens an den uns zugänglichen Stellen einige Zehntausendstel des Erdhalbmessers oder einige Kilometer nicht übersteigen können (vergl. Bruns, die Figur der Erde S. 32). Es wird also $\Delta_i \sin z_i$, wenn wir von der allerunmittelbarsten Nähe des Zenits absehen, stets sehr gross sein gegenüber e, und das ist wesentlich zum Gelingen, weil u. a. auch der Einfluss einer falschen Reduktion vom geozentrischen Δ'_a zu demjenigen des Orts verschwindet.

Zunächst besteht zwischen einem Fehler in Δ_b wegen eines solchen in Δ_a die Beziehung

$$d\Delta_b = \left\{\frac{\Delta_a}{\Delta_b} - \frac{k \sin(z_a - \mu_{ab})}{\Delta_b}\right\} d\Delta_a$$

hier genügend genau

$$d\Delta_b = d\Delta_a.$$

Der mittleren Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes wird meist eine Unsicherheit von $0''{,}5$ beigelegt. Lassen wir diese Zahl zunächst auch für die den Tafeln zu entnehmenden Werte der A. H. P. in einem gegebenen Moment gelten, so ist rund

$$\frac{dp}{\sin p} = \frac{1}{7000}$$

und somit der Irrtum in e für

$$e = 7000\, m$$
$$e = \quad 1\, m.$$

Weniger günstig steht es mit $\frac{dm}{dp}$. Aus der ersten der Gl (19) folgt

$$dm = \operatorname{tg} m \cdot \frac{dp}{\sin p},$$

mithin unter obiger Annahme für $m = 1^0$

$$dm = 0''5,$$

welcher Fehler ganz in dz'_b und auch in dz_b eingeht; ferner nach Gl. (17)

$$da_i = -\frac{\operatorname{tg} n \cdot \sec (a_i - a'_{ba})}{\sin^2 z_i} \cdot dz_i$$

Setzen wir $n = 12'$, $z_i = 1,\ 5,\ 10^0$, so wird

$$d\varepsilon = da_i = 6'',\ 0''2,\ 0''06.$$

Es bleibt noch $\frac{de}{d\varepsilon}$ zu ermitteln. Hiebei begegnen wir der Schwierigkeit, dass im Nenner des Wertes für e eine ebenfalls von ε abhängige Grösse steht, deren Zusammenhang mit ε nach Gl (18) kein einfacher ist. Wir vernachlässigen denselben. Dass der wahre Ort in der Sehne, bz. Azimutalebene des angenommenen liegt, scheint am leichtesten möglich bei Punkten genähert gleicher Polhöhe, wenn die Kreisform des Parallels schlecht zutrifft, ferner wenn die Lote der Orte einen sehr stumpfen Winkel bilden. (Der letztere Fall ist von selbst ausgeschlossen.)

Zur genäherten Schätzung der Genauigkeit genügt die Gleichung

$$de = e \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot d\varepsilon.$$

Nehmen wir für ε die Werte, welche die späteren Beispiele liefern (nämlich bei $n = 12'$, $e = 2{,}8$ Km rd) so wird

$\varepsilon = 1^0$	$de = 200\,m$ rd
$= 5^0$	$= 40$ „ „
$= 10$	$= 0$ „ „

Zur Beleuchtung dieser Unsicherheiten bei Entfernungen, wo der Verbindungsbogen $^4/_5$ eines Quadranten beträgt, setzen wir die mittleren Fehler des Quadranten nach Bessels Bestimmungen in dem Astr. N. Nr. 333 und 438 hierher

508,7 bz. 498,23 *m*.

5. Wirkung der Beobachtungsfehler. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn unsere Voraussetzungen sich alle zutreffend erweisen würden. Aber schon die Unsicherheit der Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes nach den Ephemeriden oder Tafeln eines Ortes ist zu gering veranschlagt, allein nach obigen Zahlen stellt eine 2 bis 3fache Vergrösserung derselben das Gelingen des Verfahrens noch nicht in Frage. Das vermag jedoch die ungenügende Präcision der Mondbeobachtung, welche auch noch in kleinen Zenitdistanzen erfolgen muss. Wenn es daher nicht gelingt nachzuweisen, dass Anomalien der Erdgestalt durch Beobachtungen mit dem erreichbaren Grade der Genauigkeit aufgedeckt werden können, so fällt das ganze Verfahren.

Zuerst einige Bemerkungen über die Ausführung der Beobachtungen. Da die Bewegung des Mondes von einem Orte aus gesehen innerhalb genügend kleiner Intervalle betrachtet eine stetige ist, so denken wir uns die Beobachtung desselben z. B. von *A* aus in mehreren benachbarten Azimutalebenen ausgeführt. Es kann nun aus den gleichen Beobachtungen sowohl auf ein zwischenliegendes Azimut als auf eine gegebene Zeit interpoliert werden (letzteres entsprechend einer Beobachtung in *B* in einem bestimmten Azimut), weil die Azimute der Mondörter in den auf dem Horizont nicht

senkrechten Ebenen von den Azimuten derselben nicht allzu verschieden sind, und die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte, so lange die Zenitdistanz der Orte kleiner als 90^0, ebenfalls gering bleibt. Wählt man daher die Beobachtungszeiten in geeigneten Intervallen oder die Azimutalebenen der Einstellungen in entsprechenden Abständen, so muss die Stetigkeit in der Bewegung zum Ausdruck kommen und u. a. ein Mittel an die Hand geben, die abgelesenen Koordinaten zu verbessern. Da wir uns überdies den Mond bei seiner Kulmination auch stets beobachtet denken, so vereinfacht sich das Verfahren, weil nun der Stundenwinkel bekannt ist.

Dieser Stundenwinkel ist jedoch nicht fehlerfrei; sein Einfluss auf das abgelesene Azimut muss zunächst ermittelt werden. Aus der Gl.

$$\sin z \cdot da = \cos \delta \cdot dt$$

folgt, da $\cos \delta$ sich nur um 0,1 von der Einheit entfernt, genähert

$$da = \frac{dt}{\sin z}$$

also für $z = 1,\ 5,\ 10^0$, wenn wir zugleich bedenken, dass der Fehler im Stundenwinkel sich aus der falschen Auffassung des Durchganges durch den Meridian sowie durch die Azimutalebene zusammensetzt — beide Unsicherheiten gleich gross entnommen *)

$$da = 81\ dt,\ 16\ dt,\ 8\ dt$$

Beobachtungen des Mondet an 5—7 Fäden bei der Kulmination geben mittlere Fehler des arithmetischen Mittels von $0^s,04$, also

$$da = 32'',\ 6'',\ 3''.$$

*) Analog wie bei Fixsternbeobachtungen im 1. Vertikal der schiefe Antritt an den Faden bei Anwendung des Chronographen ebenso genau bestimmt wird, wie bei der Registrierung im Meridian, glauben wir beim Monde dasselbe annehmen zu dürfen.

Diese Zahlen im Vergleich mit den weiter unten zu ermittelnden geben zu erkennen, dass, wenn sich die Genauigkeit der Mondbeobachtungen nicht erhöhen lässt, selbst in den günstigst gelagerten Fällen zweifelhafte Resultate zu Tage gefördert werden müssen.

Ob sich eine Steigerung der Sicherheit bei Beobachtungen mit dem Universaltransit erreichen lässt, vermag Verfasser nicht zu beurteilen, da ihm keine derartigen Versuchsreihen vorliegen. Gewichtige Stimmen sprechen sich dagegen aus. Vergl. die Verhandlungen der Permanenten Kommission für die Internationale Erdmessung zu Nizza 1887 S. 66—67 den Bericht Försters als Referent über die Verwertung der Mondbeobachtungen im Interesse der Geodäsie.

6. Die zu erwartenden Azimutalabweichungen. In Betreff der Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche verweisen wir auf Helmerts Bericht über Lotabweichungen in den eben genannten Verhandlungen der P. K. f. d. J. E. Hier sei nur hervorgehoben, dass selbst die Dimensionen des Clarke'schen Ellipsoids von 1880, die man gegenwärtig für die besten halten muss, wie die Kreisform überhaupt der Krümmung des Parallels stellenweise nur mit geringer Annäherung entspricht.

Die Grösse, welche zur Entdeckung der Anomalien führt, ist ε, der Unterschied zwischen ellipsoidisch gerechnetem und beobachtetem wahrem Azimut. Dieser Winkel wird um so merklicher, in je kleineren Zenitdistanzen die Beobachtung geschehen kann. Um uns eine geeignete Vorstellung zu verschaffen, folgen drei Beispiele. Es wurde bei diesen angenommen, dass zwei beliebig auf der Erdoberfläche herausgegriffene Orte beigegebener grosser Axe Rotations-Ellipsoide mit den Abplattungs-Verhältnissen $^1/_{280}$ bis $^1/_{310}$ entsprechen können. Die Zahlen sind gewiss nicht zu hoch gegriffen: legt doch die Ordnance Trigonometrical Survey, Principal

Triangulation 1 : 280,4 zu Grunde, während Beilage 11 der mehrerwähnten Verhandlungen anführt, dass zur Verifikation der bis jetzt gefolgerten Abplattung von $^1/_{283,6}$ in Russland (Polen) astronomisch geodätische Arbeiten unternommen wurden.

Wir machen nun im folgenden stets zwei Annahmen:

1. Im Punkt A ist im Azimut a_{ab} beobachtet worden unter der Voraussetzung die Abplattung sei die Bessel'sche, während sie $^1/_{280}$ beträgt.

2. Die Rechnung legt $\alpha = {}^1/_{280}$ zu Grunde, während den thatsächlichen Verhältnissen $^1/_{310}$ entsprechen würde.

Als gerechnet ist das Azimut oder die Differenz bezeichnet, welche sich bei der angenommenen Abplattung ergäbe, als beobachtet jene Zahlen für das wahre α.

1. Beispiel: $B_a = +20^0$, $B_b = -20^0$, $L_{ab} = 20^0$

$\alpha =$	$^1/_{280}$	$^1/_{299,15}$	$^1/_{310}$
$n_a = n_b =$	7′ 15″8	6′ 47″7	6′ 33″4
$a_{ab} - a'_{ab} =$	10 21,3	9 41,3	9 20,9

Genäherter Abstand des wahren Orts B' von der Ebene AZ_aB

ad 1) 1,0, ad 2) 1,5 Km.

Beobachtete Zenitdistanz in A

	$z_i = 1^0$	$z_i = 5^0$	$z_i = 10^0$
ad 1) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	6°30′ 8″	1°17′ 41″	0°38′ 32″
beob.	6 29 37	1 17 34	0 38 29
$\varepsilon =$	31″	7″	3″
ad 2) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	6°57′ 5″	1°23′ 1″	0°41′ 11″
beob.	6 56 20	1 22 51	0 41 7
$\varepsilon =$	45″	10″	4″

2. Beispiel: $B_a = +20^0$, $B_b = 20^0$, $L_{ab} = 40^0$

$n_a = n_b$	$= 11'\ 31,''5$	$10'\ 47,''2$	$10'\ 24,''5$
$a_{ab} - a'_{ab}$	$= 13\ 54,4$	$13\ 0,8$	$12\ 33,5$

Genäherter Abstand
ad 1) 1,5, ad 2) 2,3 Km.

	$z_i = 1^0$	$z_i = 5^0$	$z_i = 10^0$
ad 1) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	$10^0\ 21'\ 20''$	$2^0\ 3'\ 19''$	$1^0\ 1'\ 10''$
beob.	$10\ 20\ 33$	$2\ 3\ 9$	$1\ 1\ 6$
$\varepsilon =$	$47''$	$10''$	$4''$
ad 2) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	$11^0\ 4'\ 28''$	$2^0\ 11'\ 47''$	$1^0\ 5'\ 22''$
beob.	$11\ 3\ 18$	$2\ 11\ 32$	$1\ 5\ 15$
$\varepsilon =$	$70''$	$15''$	$7''$

3. Beispiel: $B_a = 0$, $B_b = +50^0$, $L_{ab} = 60^0$

n_a	$= 11'\ 4,''7$	$10'\ 22,''0$	$10'\ 0,''2$
$a_{ba} - a'_{ba}$	$= 11\ 41,9$	$10\ 56,9$	$10\ 33,8$
n_b	$= 10'\ 57,''8$	$10'\ 15,''5$	$9'\ 53,''9$
$a_{ab} - a'_{ab}$	$= 11\ 34,6$	$10\ 50,0$	$10\ 27,1$

Genäherter Abstand des Ortes A' von Ebene BZ_bA
ad 1) 1,6, ad 2) 2,5 Km.

	$z_i = 1^0$	$z_i = 5^0$	$z_i = 10^0$
ad 1) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	$9^0\ 50'\ 35''$	$1^0\ 57'\ 16''$	$0\ 58\ 11$
beob.	$9\ 49\ 44$	$1\ 57\ 6$	$0\ 58\ 7$
$\varepsilon =$	$51''$	$10''$	$4''$
ad 2) $a_i - a'_{ae}$			
ger.	$10^0\ 31'\ 37''$	$2^0\ 5'\ 20''$	$1\ 2\ 11$
beob.	$10\ 30\ 20$	$2\ 5\ 4$	$1\ 2\ 3$
$\varepsilon =$	$77''$	$16''$	$8''$

In B kann der Mond unter den günstigsten Verhältnissen noch in 32° Zenitdistanz beobachtet werden. Unter den beiden oben gemachten Annahmen folgt

$$\varepsilon = 1''{,}7 \quad bz\ 2''{,}6$$
$$z_i = 42^0 \qquad = 1{,}3 \qquad 2{,}1$$

(während $dt = 0^s{,}04$ ein $da = 1{,}1$ bz 0,9 veranlasst.

Bei den Rechnungen ist eine genähert mittlere Mondparallaxe zu Grunde gelegt. Sei M'_1 die Projektion von M_1 auf den Horizont von B, M''_1 der Fusspunkt des Lotes von M'_1 auf die Spur der Ebene AZ_aB, B' der wahre Ort, $B'M'''_1$ parallel zu BM''_1, so findet man

$$BM'_1 = \frac{\sin z_1}{\sin p_1} = \Delta_1 \sin z_1$$
$$BM''_1 = \Delta_1 \cdot \sin z_1 \cos (a_1 - a'_{ba})$$
$$M'_1M''_1 = \Delta_1 \sin z_1 \sin (a_1 - a'_{ab})$$

daher das Azimut des Mondes im ellipsoidischen Ort B

$$a'_{ba} + arc\ \mathrm{tg} \frac{M'_1M''_1}{BM''_1}$$

(denselben Wert liefert selbstverständlich auch Gl. 17), während im wahren Ort B' kommt:

$$a'_{ba} + arc\ \mathrm{tg} \frac{M'_1M''_1 - M''_1M'''_1}{B'M''_1}$$

$M''_1M'''_1$ der Abstand des wahren Orts B' von AZ_aB (a'_{ba} bedeutet noch das Azimut im ellipsoidischen Ort).

Wenn also beide Orte so liegen, dass ihre Polhöhen innerhalb der Grenzen der Monddeklination bleiben, so zeigt der Vergleich der letzt ermittelten Zahlen mit den Resultaten von S. 26, dass zwar gröbere Abweichungen konstatiert werden können, geringe jedoch ebenso wie eine präzise Bestimmung erst möglich sind, wenn die Beobachtungen eine grössere Schärfe erreichen.

Wie wenig verwertbar der Mond in grösseren Zenit-

distanzen ist, um die Neigung der Azimutalebene zu fixieren, folgt auch aus der Differentiation der Gl. 17. Sie liefert

$$\frac{dn}{\cos^2 n} = \sin(a_i - a') \frac{dz\,i}{\cos^2 z_i} + \cos(a_i - a') \operatorname{tg} z_i\, da_i$$

und ist ohne Daten nicht bestimmt. Für kleine Winkel $a_i - a'$, wie sie bei Zenitdistanzen von mehr als 5^0 auftreten, folgt jedoch genau, wenn

$da_i = dz_i = 1''$	
$z = 5^0$	$dn = 0''1$
$= 30$	$= 0{,}6$
$= 45$	$= 1{,}0$
$= 60$	$= 1{,}8$
$= 85$	$= 12$ ca.

Es drängt sich noch die Frage auf, ob man die Abweichungen nicht künstlich durch Annahme eines wenig wahrscheinlichen a vergrössern soll. Dieselbe ist jedoch zu verneinen. Selbst bei grösserer Genauigkeit der Beobachtungen wird der oben schematisch angedeutete Rechnungsgang nicht schon das erste Mal zum Ziele führen, sondern erst die Wiederholungen der Rechnungen mit neu gewonnenen Werten n, a und a' sowie den entsprechend neu interpolierten Mondazimuten und Zenitdistanzen werden allmälig bewirken, dass alle der Gl. 17 genügen. Setzt man ein unwahrscheinliches a voraus, so sind die ersten Rechnungsstadien vergeblich gewesen.

7. Schluss. Fassen wir das Vorstehende nochmals kurz zusammen. Gegenüber den bisher angegebenen Verfahreu, welche alle mehr oder minder der Mondtafeln bedürfen, bietet die Gl. 17 den Vorteil, dass sie frei ist von aller Theorie des Mondes. Dieser Vorteil ist jedoch nur ein scheinbarer. Denn sowie man dieselbe verwerten will, muss konstatiert werden, welches Azimut im einen Ort unter Voraussetzung einer bestimmten Erdgestalt dem abgelesenen des

andern Orts entspricht. Um jenes zu erhalten, bedürfen wir der Parallaxe. Wenn nun auch ein Fehler in der Entfernung des Mondes vom einen Ort auf die lineare Polarkoordinate des wahren (andern) Orts im Horizont des angenommenen ohne jeden Einfluss bleibt, so zeigen die Betrachtungen S. 24, dass das gleiche für das Azimut nicht zutrifft.

Man könnte zwar die Lösung auch in der Weise versuchen, dass man, nachdem die Gleichungen (17) z. B. in A nicht dasselbe n_a liefern, in B das Azimut a_{ba} etwas variieren lässt und demgemäss in A Azimut und Zenitdistanz aus den vorliegenden Beobachtungen neu interpoliert. Wir kennen auch das zu a_{ba} gehörige a'_{ab}, weil sich aus den Gl. 1 und 2 immer n eliminieren lässt. Würden nunmehr alle Gl. 17 befriedigt, so gienge die Lot-Ebene des einen Orts durch den andern und die Lösung wäre erfolgt. Allein wir sehen auch sofort hin, dass Anfangs jeder Anhalt fehlt, wie denn die Azimute abzuändern sind, so dass es fraglich erscheint, ob dieser mod. proc. zum Ziele führt.

Wir dürfen endlich nicht unterlassen, auf die Schwierigkeiten korrespondierender Beobachtungen hinzuweisen, sowie auf die Unmöglichkeit, Unsicherheit in der Erfassung des Mondrandes u. a. wegzuschaffen, da ein Vertauschen der Observatoren wegen räumlicher wie zeitlicher Verhältnisse wohl ausgeschlossen ist.